

Grandezas escalares e vetoriais

Vamos supor que alguém diga que vai chegar às 5 horas e 30 minutos ou que a temperatura da sala é de 20°C. Em relação as grandezas *tempo* e *temperatura*, essas informações são completas, não deixam dúvida. Grandezas desse tipo ficam perfeitamente definidas pelo valor numérico e unidade. Estas grandezas são denominadas de **escalares**.

São exemplos também de grandezas escalares o comprimento, a área, o volume, a massa, a energia etc...

Observe agora as figuras a seguir:



O ponto representa um barquinho visto de cima, navegando num lago de águas tranquilas. Se o barco se deslocar 5 km, para onde irá?

Aplica-se ao corpo que está sobre a mesa uma força de 100 N. O que acontece? Ele será comprimido contra a mesa? Vai deslocar-se para a direita? Ou para a esquerda? Vai subir?

jun 1-16:23

Embora o valor numérico e a unidade das grandezas tenham sido dadas, deslocamento de 5 km e força de 100 N, não há como responder às perguntas formuladas. Só poderíamos determinar a posição final do barco, ou o possível efeito da força sobre o corpo, se soubéssemos a **direção** e o **sentido** em que atuam. Grandezas desta natureza, são denominadas de **grandezas vetoriais**.

Grandeza vetorial: É toda grandeza em que, para ficar bem definida você deverá conhecer o módulo (valor numérico), a direção e o sentido.

Você sabe qual é a diferença entre direção e sentido?

jun 1-16:23

Direção e Sentido:

Observe os vetores abaixo:



Os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} têm a mesma direção. Somente \vec{d} tem direção diferente.

O vetor \vec{c} tem sentido oposto ao de \vec{a} e \vec{b} .

Observe que a representação do nome do vetor é acompanhado de uma seta (\rightarrow) sobre o nome.

jun 1-16:24

Veja, no exemplo, como iremos representar e dar valores aos vetores.



\vec{a} = Nome do vetor - vetor "a"
 1u = Uma unidade qualquer. Poderia ser 1cm, 1m, 1N ...

O vetor acima tem 2 unidades. Para representarmos o valor do vetor simplesmente escrevemos:

$$a = 2u \text{ ou } |\vec{a}| = 2u$$

Então podemos dizer que o vetor \vec{a} tem 2 unidades, direção horizontal e sentido para a direita.

jun 1-16:24

Segmentos de reta orientados que possuem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo (valor) representam vetores iguais.



Segmentos de reta que possuem a mesma direção e o mesmo módulo porém sentidos contrários, representam **vetores opostos**.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = -\vec{b} \\ \text{ou} \\ \vec{b} = -\vec{a} \end{array} \right.$$

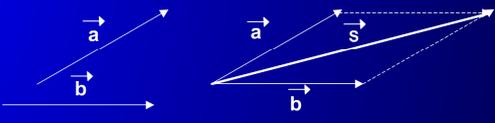
jun 1-16:31

Vetor Soma ou Resultante

Vetor soma \vec{S} ou vetor resultante \vec{R} é o vetor equivalente a dois ou mais vetores. Para se obter o vetor resultante de dois vetores, dois métodos são comumente utilizados:

1º) Método do paralelogramo:

Vamos achar o vetor soma ou resultante dos dois vetores abaixo:



Primeiramente colocam-se os dois vetores com a mesma origem e desenham-se um paralelogramo com os vetores dados. O vetor resultante é a diagonal do paralelogramo que parte da origem dos vetores.

Repetir Método

jun 1-16:31

Atenção

O módulo (valor) do vetor soma, em geral não é igual à soma dos módulos dos vetores em separado. Esta soma só será igual se os vetores tiverem a mesma direção e o mesmo sentido.

$S \neq a + b$

O valor do vetor soma é dado pela expressão: $S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2.ab.\cos \alpha}$

ver demonstração

jun 1-16:31

2º) Método da linha poligonal

Considere os vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} , a seguir:

Agora desenham-se os vetores (em qualquer ordem) de tal forma que a extremidade de cada um deles coincida com a origem do outro.

jun 1-16:31

2º) Método da linha poligonal

Considere os vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} , a seguir:

O vetor soma ou resultante, é obtido ligando-se a origem do primeiro com a extremidade do último vetor.

repetir

jun 1-16:39

Vetor Diferença

O vetor diferença \vec{d} é o vetor equivalente à diferença entre dois vetores.

Para subtrair dois vetores basta somar um deles com o oposto do outro. Por exemplo, vamos determinar o vetor diferença dos vetores \vec{a} e \vec{b} abaixo:

O vetor diferença corresponde à adição do vetor \vec{a} com o vetor $-\vec{b}$.

jun 1-16:39

Vetor Diferença

Observe agora que, se os dois vetores tiverem a mesma origem, o vetor diferença pode ser obtido ligando-se as extremidades dos vetores, tendo o sentido sempre indicado para o primeiro, ou seja, o vetor $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$ aponta para o vetor \vec{a} , enquanto o vetor $\vec{D} = \vec{b} - \vec{a}$ aponta para o vetor \vec{b} .

repetir

jun 1-16:39

Observações e complemento:

1ª) A soma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$ pode ser representada por $\vec{S} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (em negrito) em alguns livros.

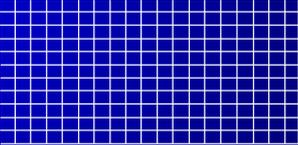
Por exemplo:
vetor "a" = $\vec{a} = \mathbf{a}$ ("a" em negrito)

módulo do vetor = $|\vec{a}| = a$ ("a" sem negrito), que é o valor numérico do vetor "a".

jun 1-16:39

Observações e complemento:

2ª) Quando vamos somar vários vetores, o uso da grade facilita bastante. Com ela você poderá transferir os vetores mantendo todas as propriedades, ou seja, módulo direção e sentido. Caso a grade não seja dada, você deverá usar régua e transferidor (ou esquadro) para tentar reproduzi-los da melhor maneira possível.



jun 1-16:49

Observações e complemento:

3ª) O valor do módulo da soma de dois vetores é dado por $S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}$ onde "alfa" é o ângulo entre os dois vetores. Do mesmo modo que foi mostrada a soma, mostra-se que a diferença é dada por:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha}$$

É fácil guardar esta fórmula. Observe que no interior da raiz, temos algo parecido com um trinômio quadrado perfeito, sendo que o termo "2ab" está acompanhado de "cos" do ângulo.

jun 1-16:49

Casos Especiais

1) Determine a soma de dois vetores paralelos de módulos 3u e 4u.



Solução: Como os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido, é só somar seus módulos.

$$S = 3u + 4u$$

$$S = 7u$$

jun 1-16:49

Casos Especiais

2) Determine o módulo do vetor soma ou vetor resultante de dois vetores de 3u e 4u, que formam um ângulo de 90° entre si.



Solução: Como o vetor resultante tem origem na origem do primeiro e extremidade na extremidade do segundo, teremos um triângulo retângulo e poderemos usar, para achar o seu valor, o teorema de Pitágoras.

$$S = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$S = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$S = \sqrt{9 + 16}$$

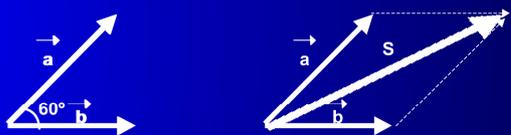
$$S = \sqrt{25}$$

$$S = 5u$$

jun 1-16:49

Casos Especiais

3) Determine o valor do vetor soma ou vetor resultante de dois vetores de 3u e 4u que formam um ângulo de 60° entre si.



Solução: O vetor soma ou resultante equivale à diagonal do paralelogramo e seu valor é dado por:

$$S = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos 60^\circ} \rightarrow S = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$S = \sqrt{9 + 16 + 12} \rightarrow S = \sqrt{37} u$$

jun 1-16:49

Casos Especiais

4) Ache o módulo do vetor soma de dois vetores de 3u e 4u que formam entre si um ângulo de 180°.



Solução: Como o ângulo é de 180°, teremos na realidade o valor do módulo de a' menos o valor do módulo de b'.

Se você utilizar a expressão da soma, substituindo cos 180° por -1, você obterá o mesmo resultado.

$$S = |a - b|$$

$$S = |4 - 3|$$

$$S = 1 \text{ direção horizontal sentido direita.}$$

jun 1-16:56

Multiplicação de um vetor por um escalar

O produto de um vetor \vec{a} por um número real k (escalar) é o vetor \vec{p} que representa as seguintes características:

- o módulo é dado por $|k| |\vec{a}|$;
- a direção é a mesma do vetor \vec{a} ;
- com relação ao sentido, temos duas possibilidades, dependendo se ($k > 0$), o vetor \vec{p} tem o mesmo sentido do vetor \vec{a} e, no segundo caso ($k < 0$), o vetor \vec{p} tem sentido contrário ao vetor \vec{a} .

jun 1-16:56

The diagram shows a grid with a vector \vec{a} pointing 3 units right and 1 unit up. Two other vectors are shown: $\vec{p}_1 = 3\vec{a}$, which is 9 units right and 3 units up, and $\vec{p}_2 = -2\vec{a}$, which is 6 units left and 2 units down.

jun 1-16:56

Exercícios

1) São dados os vetores \vec{a} e \vec{b} . Assinale o vetor que melhor representa a soma ($\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$).

The diagram shows vector \vec{a} pointing up and to the right, and vector \vec{b} pointing to the right. Below are five possible result vectors: 1) pointing down, 2) pointing down and to the right, 3) pointing up and to the right, 4) pointing up, and 5) pointing to the right.

jun 1-16:56

Exercícios

2) São dados os vetores \vec{a} e \vec{b} . Assinale o vetor que melhor representa a diferença ($\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$).

The diagram shows vector \vec{a} pointing up and to the right, and vector \vec{b} pointing to the right. Below are five possible result vectors: 1) pointing down, 2) pointing down and to the right, 3) pointing up, 4) pointing up and to the right, and 5) pointing to the right.

jun 2-06:30

Exercícios

3) Qual o valor do vetor soma de dois vetores perpendiculares entre si e cujos módulos são 6 e 8 unidades?

The diagram shows two perpendicular vectors: one pointing up with length $6u$ and one pointing right with length $8u$.

7u
 10u
 12u
 14u

jun 2-06:30

Exercícios

4) Qual é o ângulo formado por dois vetores de módulos 5 unidades e 4 unidades e cujo vetor soma tem $\sqrt{61}$ unidades?

0°
 60°
 45°
 90°

jun 2-06:30

Exercícios de aprendizagem

1) Represente a soma vetorial pedida e dê o valor do vetor resultante em cada caso a seguir:

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} \rightarrow s = \sqrt{16 + 9} \rightarrow s = \sqrt{25} \rightarrow \boxed{s = 5 \text{ m}}$
 $\vec{r} = \vec{a} + \vec{f} \rightarrow r = \sqrt{16 + 9} \rightarrow r = \sqrt{25} \rightarrow \boxed{r = 5 \text{ m}}$

jun 30-17:39

$\vec{s} = \vec{b} + 2\vec{c} - 2\vec{d} \therefore s = \sqrt{36 + 19} \therefore s = \sqrt{55} \rightarrow \boxed{s = 7.4 \text{ m}}$
 $\vec{s} = \vec{b} + 2\vec{c} - 2\vec{d} \therefore s = \sqrt{36 + 19} \therefore s = \sqrt{55} \rightarrow \boxed{s = 7.4 \text{ m}}$

jun 30-17:39

2) Dado o diagrama vetorial, trace o vetor resultante e dê o seu valor:

$a = 3 \text{ m}$
 $b = 4 \text{ m}$
 $\theta = 60^\circ$

$s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$
 $s = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}$
 $s = \sqrt{9 + 16 + 12}$
 $\boxed{s = \sqrt{37} \text{ m}}$

jun 30-18:43

3) Dê o valor da diferença entre dois vetores que formam entre si um ângulo de 60° e cujo módulo de cada um vale respectivamente 3u e 4u.

$d = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \theta}$
 $d = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}$
 $d = \sqrt{9 + 16 - 12}$
 $\boxed{d = \sqrt{13} \text{ m}}$

jul 1-11:56

4) Mariana anda 40 metros para o leste e certa distância para o norte, de tal forma que fica afastada 50 metros do ponto de partida. Determine a distância percorrida para o norte.

$50^2 = d^2 + 40^2$
 $2500 = d^2 + 1600$
 $d^2 = 2500 - 1600$
 $d = \sqrt{900}$
 $\boxed{d = 30 \text{ m}}$

jul 1-12:20

5) Considere dois vetores: um cujo módulo seja 30 e outro cujo módulo seja 40. Determine como os vetores podem ser combinados para que a soma tenha módulo 70.

$s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta} \quad \theta = ?$
 $70 = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos \theta}$
 $(70)^2 = (\sqrt{900 + 1600 + 2400 \cdot \cos \theta})^2$
 $4900 = 2500 + 2400 \cos \theta$
 $4900 - 2500 = 2400 \cos \theta$
 $2400 = 2400 \cos \theta$
 $\boxed{\cos \theta = 1} \quad \boxed{\theta = \arccos(1)}$
 $\boxed{\theta = 0^\circ}$

jul 1-12:29